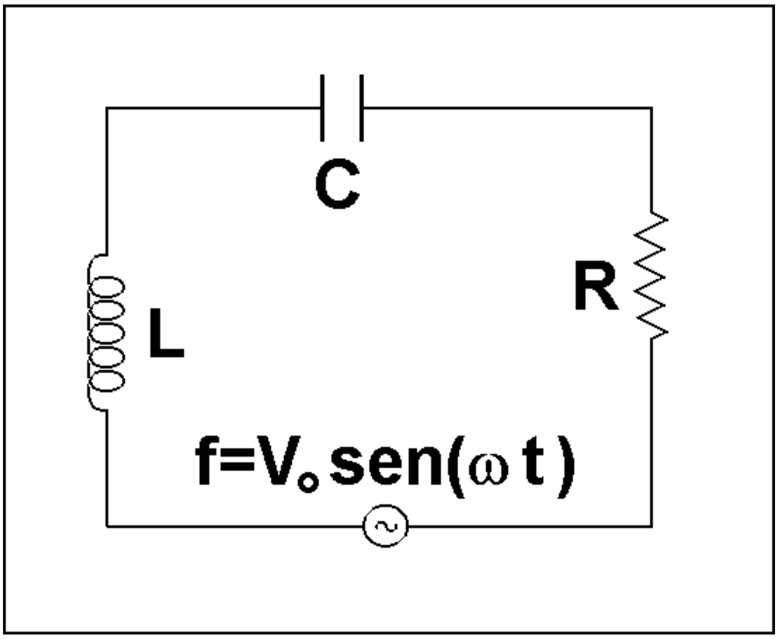
CIRCUITO RLC IN SERIE

1. Considerazioni generali

Il circuito RLC in serie *(vedi figura)* **è formato da una sola maglia in cui sono presenti una resistenza R, un'induttanza L, un condensatore di capacità C e un generatore di tensione alternata caratterizzato da una forza elettromotrice $f = V_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)$.**



Poiché la somma algebrica delle differenze di potenziale deve essere 0 in una maglia, la somma degli aumenti di potenziale deve essere uguale a quella delle sue diminuzioni. Il potenziale aumenta in corrispondenza delle forze elettromotrici: quella del generatore $f = V_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)$ e quella autoindotta $f' = -L\frac{di}{dt}$, mentre subisce una diminuzione ΔV tale che $C = \frac{q}{\Delta V}$ (e quindi $\Delta V = \frac{q}{C}$) attraverso il condensatore, ed una $\Delta V' = Ri$ attraverso la resistenza. Quindi, **dal secondo principio di Kirchhoff, si ricava**

$$\mathbf{V_0 \,sen(\omega t) - L\frac{di}{dt} = Ri + \frac{q}{C}},$$

e **derivando entrambi i membri rispetto al tempo**

$$\mathbf{V_0 \omega cos(\omega t) - L\frac{d^2 i}{dt^2} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}}$$

Tenendo presente che, per definizione di intensità di corrente, $\mathbf{i = \frac{dq}{dt}}$**, ed indicando, per brevità, con i' e i'' le derivate prima e seconda di i rispetto al tempo, si ha**

$\mathbf{V_0 \omega cos(\omega t) - Li'' = Ri' + \frac{1}{C} i}$**, da cui**

$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = V_0 \omega \cos(\omega t)$, o anche

$\mathbf{LCi'' + RCi' + i = V_0 \omega C \cos(\omega t)}$.

Prima di risolvere questa equazione, occorre aprire una parentesi di carattere matematico.

2. Equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione $4y'' - 8y' + 3y = 0$ (1).

Si tratta di un'equazione differenziale, in quanto l'incognita non è un numero, ma una funzione y=f(x), ed inoltre conosciamo una relazione non tra le potenze della funzione (y, y^2, y^3…), ma tra essa e le sue derivate (y, y', y''…).

In particolare i coefficienti di y, y' e y'' sono costanti (non dipendono dalla variabile indipendente x), e per questo si parla di equazione differenziale a coefficienti costanti; inoltre il massimo ordine di derivata che compare è il secondo (y''), e per questo si dice che l'equazione è del secondo ordine. Infine, a secondo membro abbiamo 0, e per questo l'equazione viene detta omogenea.

Per risolvere un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti occorre innanzitutto considerare il polinomio associato, cioè quello che si ottiene sostituendo y, y', y'' con 1 (x^0), x (x^1), x^2 (e così via, se necessario), e trovare per quali valori si annulla. Nell'esercizio (1), per esempio:

$4x^2-8x+3=0$, da cui $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}=\frac{4\pm 2}{4}$, e quindi $x_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ e $x_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

Se, come in questo caso, troviamo due soluzioni reali distinte ($\Delta>0$), la soluzione generale dell'equazione differenziale è $y=K_1e^{x_1x}+K_2e^{x_2x}$, essendo, da qui in poi, K_1 e K_2 due costanti arbitrarie appartenenti all'insieme dei numeri reali. In altre parole si ottengono non una, ma infinite soluzioni (una per ogni valore reale di K_1 e K_2). Nell'esempio (1) la soluzione generale è $y=K_1e^{\frac{1}{2}x}+K_2e^{\frac{3}{2}x}=K_1\sqrt{e^x}+K_2\sqrt{e^{3x}}$. Sono soluzioni particolari, per esempio, $y=3\sqrt{e^x}-4\sqrt{e^{3x}}$ ($K_1=3$, $K_2=-4$), e $y=-\pi\sqrt{e^x}+2\sqrt[5]{7}\sqrt{e^{3x}}$ ($K_1=-\pi$, $K_2=2\sqrt[5]{7}$).

Se invece il polinomio associato ha due soluzioni reali coincidenti ($\Delta=0$), la soluzione generale dell'equazione differenziale è $y=K_1e^{x_1x}+K_2xe^{x_1x}$. Per esempio la soluzione di $4y''-4y'+y=0$ (tenendo presente che $4x^2-4x+1=0$ diventa $(2x-1)^2=0$, e quindi $x=\frac{1}{2}$) è $y=K_1e^{\frac{1}{2}x}+K_2xe^{\frac{1}{2}x}$.

Infine quando $\Delta<0$ esistono due soluzioni complesse coniugate $x_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, dove α e β sono numeri reali e i è l'unità immaginaria (cioè $i^2=-1$). In questo caso la soluzione generale dell'equazione differenziale è $y=K_1\,\mathrm{sen}(\beta x)e^{\alpha x}+K_2\cos(\beta x)e^{\alpha x}$. Così $y''-2y'+5y=0$, poiché $x^2-2x+5=0$ per $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-10}=1\pm\sqrt{-9}=1\pm 3i$ ($\alpha=1,\beta=3$), è verificata per $y=K_1\,\mathrm{sen}(3x)e^x+K_2\cos(3x)e^x$

In definitiva la soluzione generale dell'equazione $ay''+by'+cy=0$, se a, b e c sono costanti dipende dalle soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione $ax^2+bx+c=0$; più esattamente tale soluzione è:

1) $\mathbf{y=K_1e^{x_1x}+K_2e^{x_2x}}$**, se** $\mathbf{\Delta=b^2-4ac>0}$**;**
2) $\mathbf{y=K_1e^{x_1x}+K_2xe^{x_1x}}$**, se** $\mathbf{\Delta=b^2-4ac=0}$**;**
3) $\mathbf{y=K_1\,sen(\beta x)e^{\alpha x}+K_2\cos(\beta x)e^{\alpha x}}$**, con** $x_{1,2}=\alpha\pm\beta i$**, se** $\mathbf{\Delta=b^2-4ac<0}$**.**

3. Equazioni differenziali non omogenee

Prendiamo ora in considerazione un'equazione differenziale in cui, al posto dello zero che compariva finora nel secondo membro, figuri una funzione f(x), come x^2, 3senx, o anche, più semplicemente, 5. Si ottiene una equazione differenziale detta non omogenea. La soluzione generale di una tale equazione si ottiene sommando una sua soluzione particolare a quella generale dell'equazione omogenea che si ricava sostituendo 0 al posto di f(x).

Risolviamo, per esempio, $5y''-2y'+y=-2+x$ (2).

Se $y = x$, $y' = 1$ e $y'' = 0$, per cui $5y'' - 2y' + y = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + x = -2 + x$: è quindi evidente che y=x è una soluzione particolare di (2). L'equazione omogenea associata è $5y'' - 2y' + y = 0$, e per risolverla occorre preventivamente studiare $5x^2 - 2x + 1 = 0$, da cui si ricava $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-10}}{5} = \frac{1 \pm \sqrt{-9}}{5} = \frac{1 \pm 3i}{5} = \frac{1}{5} \pm \frac{3}{5} i$. Essendo $\alpha = \frac{1}{5}$ e $\beta = \frac{3}{5}$, la soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = K_1 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{5}x\right)e^{\frac{x}{5}} + K_2 \cos\left(\frac{3}{5}x\right)e^{\frac{x}{5}}$. Quella dell'equazione non omogenea si ottiene sommando x (soluzione particolare dell'equazione non omogenea) a $K_1 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{5}x\right)e^{\frac{x}{5}} + K_2 \cos\left(\frac{3}{5}x\right)e^{\frac{x}{5}}$ (soluzione generale dell'equazione omogenea), ed è quindi $y = x + K_1 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{5}x\right)e^{\frac{x}{5}} + K_2 \cos\left(\frac{3}{5}x\right)e^{\frac{x}{5}}$.

4. Soluzione particolare per il circuito RLC in serie

Riprendiamo in esame l'equazione $LCi'' + RCi' + i = V_0 \omega C \cos(\omega t)$ (3) che governa il circuito RLC in serie, e cerchiamo una sua soluzione particolare che abbia la forma $i = i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, proponendoci non solo di dimostrare la validitá di tale ipotesi, ma anche di calcolare i valori che assumono le costanti i_0 e φ. Vi potreste domandare perché i(t) debba avere proprio questa forma (o anche come capire, nell'esempio del paragrafo precedente, che y=x è una soluzione particolare di $5y'' - 2y' + y = -2 + x$). Una prima risposta è: fidatevi, perché qualcuno ci ha provato prima di voi, e se non ci fosse riuscito in questo modo non starei qui a raccontarvelo; comunque non è così irragionevole l'ipotesi che, in presenza di un generatore di tensione sinusoidale, l'intensità di corrente sia anch'essa sinusoidale e abbia la stessa pulsazione (e quindi la stessa frequenza e lo stesso periodo).

Dunque, se $i = i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, è anche $i' = i_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$ e $i'' = -i_0 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$. Sostituendo queste quantità nell'equazione (3), si ottiene la seguente uguaglianza, che deve essere vera per ogni valore di t:

$$-LCi_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + RCi_0\omega \cos(\omega t + \varphi) + i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \equiv V_0 \omega C \cos(\omega t).$$

Applichiamo ora le formule di addizione, e sviluppiamo i calcoli.

$$-LCi_0\omega^2 [\operatorname{sen}(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\varphi] + RCi_0\omega[\cos(\omega t)\cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\varphi] +$$
$$+ i_0 [\operatorname{sen}(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\operatorname{sen}\varphi] \equiv V_0 \omega C \cos(\omega t);$$

$$-LCi_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)\cos\varphi - LCi_0\omega^2 \cos(\omega t)\operatorname{sen}\varphi + RCi_0\omega\cos(\omega t)\cos\varphi - RCi_0\omega\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\varphi +$$
$$+ i_0 \operatorname{sen}(\omega t)\cos\varphi + i_0 \cos(\omega t)\operatorname{sen}\varphi \equiv V_0 \omega C \cos(\omega t);$$

$$(-LCi_0\omega^2 \cos\varphi - RCi_0\omega\operatorname{sen}\varphi + i_0\cos\varphi)\operatorname{sen}(\omega t) +$$
$$+ (-LCi_0\omega^2 \operatorname{sen}\varphi + RCi_0\omega\cos\varphi + i_0\operatorname{sen}\varphi)\cos(\omega t) \equiv V_0 \omega C \cos(\omega t).$$

Ponendo $\begin{cases} a = -LCi_0\omega^2 \cos\varphi - RCi_0\omega\operatorname{sen}\varphi + i_0\cos\varphi \\ b = -LCi_0\omega^2 \operatorname{sen}\varphi + RCi_0\omega\cos\varphi + i_0\operatorname{sen}\varphi \\ c = V_0\omega C \end{cases}$, si ricava

$a \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t) \equiv c \cdot \cos(\omega t)$, dove a, b e c sono costanti (dato che non dipendono dal tempo) e i due membri sono funzioni lineari in $\operatorname{sen}(\omega t)$, $\cos(\omega t)$.

Ora, si può dimostrare che due funzioni lineari sono identiche se e solo se $\mathrm{sen}(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ hanno ordinatamente gli stessi coefficienti. Si ricava:

$$\begin{cases} a = 0 & \text{(uguaglianza coefficienti sen}(\omega t)) \\ b = c & \text{(uguaglianza coefficienti cos}(\omega t)) \end{cases}\text{, ovvero:}$$

$$\begin{cases} -LCi_0\omega^2\cos\varphi - RCi_0\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi + i_0\cos\varphi = 0 \\ -LCi_0\omega^2\,\mathrm{sen}\,\varphi + RCi_0\omega\cos\varphi + i_0\,\mathrm{sen}\,\varphi = V_0\omega C \end{cases};$$

$$\begin{cases} i_0(LC\omega^2 - 1)\cos\varphi + RCi_0\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \\ i_0(LC\omega^2 - 1)\,\mathrm{sen}\,\varphi - RCi_0\omega\cos\varphi = -V_0\omega C \end{cases}.$$

Dalla prima equazione, dividendo entrambi i membri per $i_0\cos\varphi$ (nel caso in cui tale quantità sia diversa da zero, cioè $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$), si ha

$(LC\omega^2 - 1) + RC\omega\,\mathrm{tg}\varphi = 0$, da cui $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} = \dfrac{\frac{1-LC\omega^2}{\omega C}}{\frac{RC\omega}{\omega C}} = \dfrac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R}$ (in definitiva $\boldsymbol{\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R}}$).

Inoltre, se eleviamo a quadrato e sommiamo membro a membro le due equazioni:

$$\begin{cases} i_0^{\,2}(LC\omega^2 - 1)^2\cos^2\varphi + R^2C^2i_0^{\,2}\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + 2\cdot i_0(LC\omega^2 - 1)RCi_0\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi = 0 \\ i_0^{\,2}(LC\omega^2 - 1)^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + R^2C^2i_0^{\,2}\omega^2\cos^2\varphi - 2\cdot i_0(LC\omega^2 - 1)RCi_0\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi = V_0^{\,2}\omega^2C^2 \end{cases}$$

$i_0^{\,2}(LC\omega^2 - 1)^2(\mathrm{sen}^2\,\varphi + \cos^2\varphi) + R^2C^2i_0^{\,2}\omega^2(\mathrm{sen}^2\,\varphi + \cos^2\varphi) = V_0^{\,2}\omega^2C^2$;

Tenendo presente la prima relazione fondamentale della goniometria

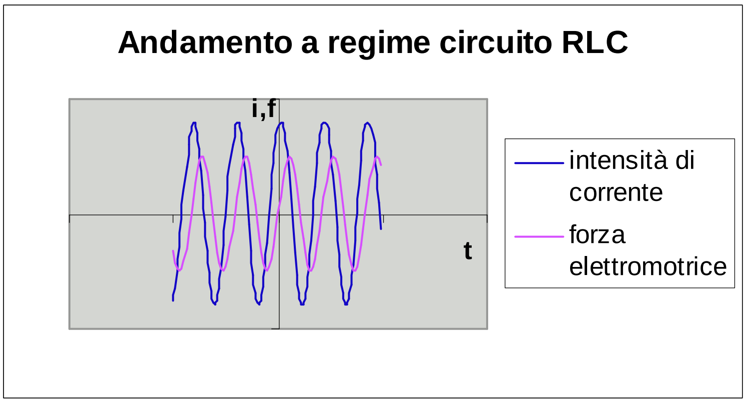
$i_0^{\,2}\left[(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2\right] = V_0^{\,2}\omega^2C^2$, e quindi

$$i_0^{\,2} = \frac{V_0^{\,2}\omega^2C^2}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2} = \frac{\frac{V_0^{\,2}\omega^2C^2}{\omega^2C^2}}{\frac{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2}{\omega^2C^2}} = \frac{V_0^{\,2}}{\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega C}\right)^2 + R^2} =$$

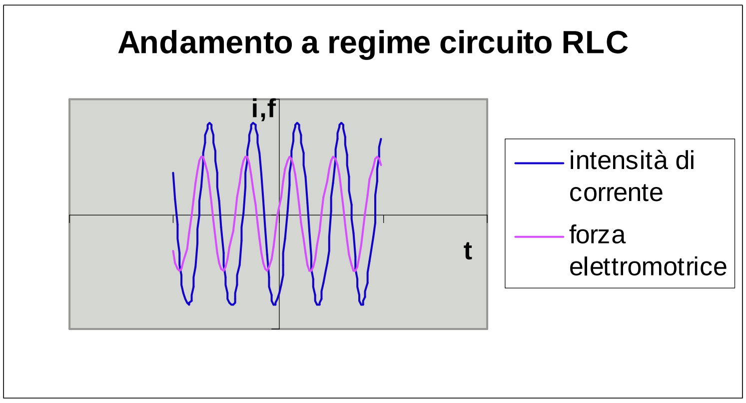
$= \dfrac{V_0^{\,2}}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$; estraendo radice $\boldsymbol{i_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}}$.

Il valore $\boldsymbol{Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$ viene detto impedenza, e rappresenta il rapporto tra i valori massimi della tensione e dell'intensità di corrente ($\boldsymbol{i_0 = \frac{V_0}{Z} \Rightarrow Z = \frac{V_0}{i_0}}$). Il fatto che Z sia, in generale, diverso da R non deve far pensare che non valga, nel circuito RLC in serie, la prima legge di Ohm: infatti il rapporto tra differenza di potenziale e intensità di corrente è effettivamente uguale in ogni istante alla resistenza R. Tuttavia, a causa dello sfasamento φ tra tensione e corrente, i rispettivi valori massimi non vengono raggiunti nello stesso istante: quindi il loro rapporto può essere diverso da R senza violare la prima legge di Ohm.

Se $\boldsymbol{\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0}$ **(cioè** $\omega^2 LC - 1 = 0$, da cui $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ e $\boldsymbol{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$**) si dice che il circuito è in condizioni di risonanza, in quanto, essendo** $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R} = \mathrm{arctg}\dfrac{-0}{R} = \mathrm{arctg}\,0$ **=0, non c'è sfasamento tra tensione e corrente. In questo caso si ha Z=R**, cioè l'impedenza uguaglia la resistenza, esattamente come se non ci fossero né induttanza né condensatore.



In definitiva una soluzione dell'equazione differenziale $\boldsymbol{LCi'' + RCi' + i = V_0 \omega C \cos(\omega t)}$**, che governa il circuito RLC in serie, è** $\boldsymbol{i = i_0\, \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$ *(vedi figure a lato: in alto $\varphi>0$, in basso $\varphi<0$)***,**



dove $\boldsymbol{i_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}}$ **e** $\boldsymbol{\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R}}$**. Il circuito è quindi attraversato da una corrente alternata di tipo sinusoidale, sfasata rispetto alla forza elettromotrice (a meno che** $\boldsymbol{\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0}$**, nel qual caso** $\boldsymbol{\varphi = 0}$**). Si noti che, se è presente il condensatore, ma non l'induttanza (L=0),** $\dfrac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R} = \dfrac{\frac{1}{\omega C}}{R} > 0$, da cui $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. In questo caso **l'intensità di corrente è in anticipo rispetto alla forza elettromotrice. Se, viceversa, manca il condensatore (C=+∞[1]),** è $\dfrac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R} = -\dfrac{L\omega}{R} < 0$, e quindi $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$. In questo caso **l'intensità di corrente è in ritardo rispetto alla forza elettromotrice.**

---

[1] Infatti la capacità di un condensatore piano (o, approssimativamente, quella di uno di forma qualunque, purché la distanza d tra le sue armature sia piccola rispetto alla loro superficie S), è $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$. Si può eliminare il condensatore dal circuito connettendo le sue armature, cioè ponendole a distanza nulla; in questo caso $C = \lim_{d \to 0^+} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = +\infty$.

5. Soluzione generale per il circuito RLC in serie

Abbiamo visto che $\mathbf{i = i_0\ sen(\omega t + \varphi)}$ **è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea** $\mathbf{LCi'' + RCi' + i = V_0 \omega C \cos(\omega t)}$**; quella generale si ottiene sommando ad essa la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Dobbiamo quindi per prima cosa studiare il polinomio associato** $\mathbf{LCx^2 + Rx + 1 = 0}$**. Distinguiamo tre casi, a seconda del segno assunto da** $\mathbf{\Delta = R^2 - 4LC}$**.**

1) Δ>0

Soluzioni del polinomio associato: $\mathbf{x_{1,2} = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4LC}}{2LC}}$**.**

Soluzione dell'equazione differenziale omogenea: $\mathbf{i(t) = K_1 e^{x_1 t} + K_2 e^{x_2 t}}$**.**

Poiché l'equazione $LCx^2 + Rx + 1 = 0$ ha tutti i coefficienti positivi, e quindi due permanenze di segno, x_1 e x_2 sono entrambi negativi. Di conseguenza $\lim\limits_{t \to +\infty} K_1 e^{x_1 t} + K_2 e^{x_2 t} = K_1 e^{-\infty} + K_2 e^{-\infty} = 0 + 0 = 0$.

Soluzione dell'equazione differenziale non omogenea: $\mathbf{i(t) = i_0\ sen(\omega t + \varphi) + K_1 e^{x_1 t} + K_2 e^{x_2 t}}$**. Poiché** $\mathbf{\lim\limits_{t \to +\infty} K_1 e^{x_1 t} + K_2 e^{x_2 t} = 0}$**, a regime, per t che tende a +∞, l'intensità di corrente coincide, praticamente, col valore della soluzione particolare precedentemente trovata, cioè** $\mathbf{i(t) \cong i_0\ sen(\omega t + \varphi)}$

2) Δ=0

Soluzioni del polinomio associato: $\mathbf{x_1 = x_2 =} \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4LC}}{2LC} \mathbf{= -\dfrac{R}{2LC}}$**.**

Soluzione dell'equazione differenziale omogenea: $\mathbf{i(t) = K_1 e^{x_1 t} + K_2 t e^{x_1 t}}$**.**

Poiché anche in questo caso abbiamo due permanenze di segno, le due soluzioni coincidenti del polinomio sono negative; perciò $\lim\limits_{t \to +\infty} K_1 e^{x_1 t} + K_2 t e^{x_1 t} = K_1 e^{-\infty} + K_2 \cdot 0 \cdot e^{-\infty} = 0 + 0 = 0$.

Soluzione dell'equazione differenziale non omogenea: $\mathbf{i(t) = i_0\ sen(\omega t + \varphi) + K_1 e^{x_1 t} + K_2 t e^{x_1 t}}$**. Ancora una volta, se t tende a +∞,** $\mathbf{i(t) \cong i_0\ sen(\omega t + \varphi)}$

3) Δ<0

Soluzioni del polinomio associato: $x_1 = x_2 = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4LC}}{2LC} = -\dfrac{R}{2LC} \pm \dfrac{\sqrt{R^2 - 4LC}}{2LC} = -\dfrac{R}{2LC} \pm \dfrac{\sqrt{4LC - R^2}}{2LC} i$ (*i*, in questa formula, rappresenta l'unità immaginaria, non l'intensità di corrente!); quindi $\mathbf{\alpha = -\dfrac{R}{2LC}}$ **e** $\mathbf{\beta = \dfrac{\sqrt{4LC - R^2}}{2LC}}$**.**

Soluzione dell'equazione differenziale omogenea: $\mathbf{i(t) = K_1 \cos(\beta t) e^{\alpha t} + K_2\ sen(\beta t) e^{\alpha t}}$**.**

Poiché α<0, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = e^{-\infty} = 0$; nonostante non esistano $\lim\limits_{t \to +\infty} sen(\beta t)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} \cos(\beta t)$, le funzioni $sen(\beta t)$ e $\cos(\beta t)$ sono limitate, essendo $-1 \le sen(\beta t) \le 1$ e $-1 \le \cos(\beta t) \le 1$ (una funzione y=f(x) si dice limitata se esiste un numero reale positivo M tale che, qualunque sia il numero reale x appartenente al campo di esistenza della funzione, sia $-M \le f(x) \le M$).

Ora, si può dimostrare (a partire dal primo teorema del confronto) che il prodotto tra una funzione che tende a 0 ed una limitata dà una funzione che tende a 0. Quindi $\lim_{t \to +\infty} K_1 \cos(\beta t)e^{\alpha t} + K_2 \operatorname{sen}(\beta t)e^{\alpha t} = K_1 \cdot 0 + K_2 \cdot 0 = 0$.

Soluzione dell'equazione differenziale non omogenea: $i(t) = i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + K_1 \cos(\beta t)e^{\alpha t} + K_2 \operatorname{sen}(\beta t)e^{\alpha t}$. Anche in questo caso, se t tende a +∞, $i(t) \cong i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

Quindi, qualunque sia il segno di Δ, la corrente che circola nel circuito RLC in serie può essere considerata la somma di due contributi:

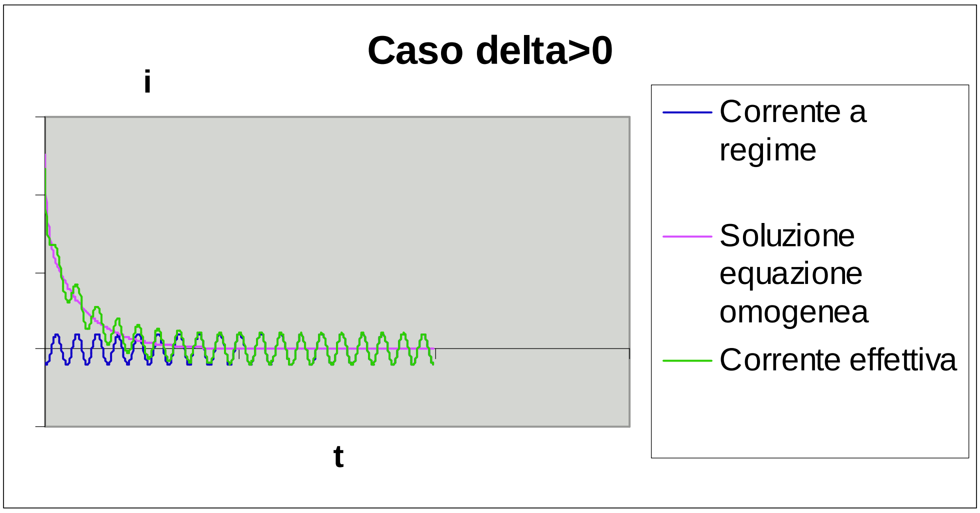
$$i_1(t) = \begin{cases} K_1 e^{x_1 t} + K_2 e^{x_2 t} & \text{se } \Delta > 0 \\ K_1 e^{x_1 t} + K_2 t e^{x_1 t} & \text{se } \Delta = 0 \\ K_1 \cos(\beta t)e^{\alpha t} + K_2 \operatorname{sen}(\beta t)e^{\alpha t} & \text{se } \Delta < 0 \end{cases}$$

(soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea)[2];

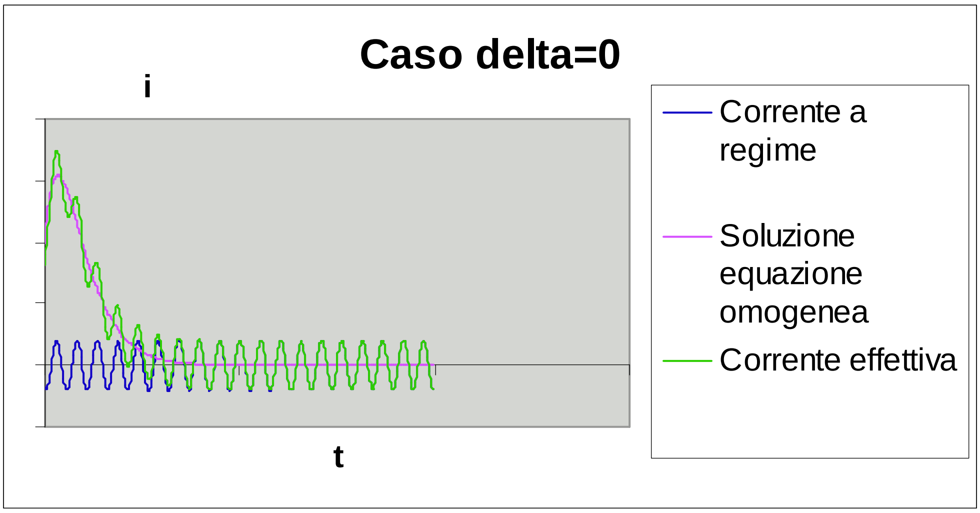
$i_2 = i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ (soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea).

L'apporto di $i_1(t)$ alla corrente effettiva può essere importante all'inizio, quando t è piccolo, ma man mano che t, tendendo a +∞, assume valori sempre più grandi, diventa prevalente $i_2(t)$, mentre $i_1(t)$ può essere trascurata. La soluzione particolare che abbiamo trovato descrive perciò, in ogni caso, l'andamento a regime del circuito RLC in serie *(vedi le figure alla pagina successiva)***.**

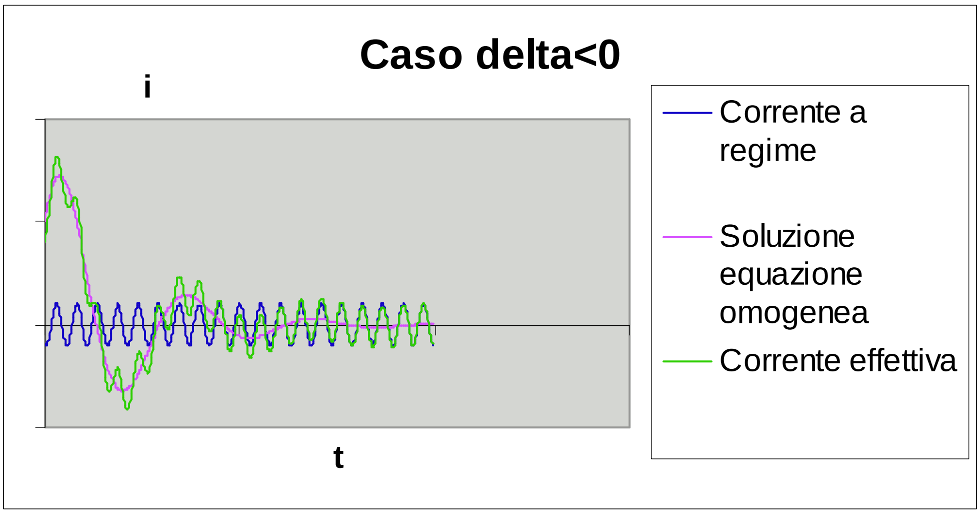
[2] I valori che assumono le costanti K_1 e K_2 dipendono, come nel caso delle extracorrenti di apertura e di chiusura, dalle condizioni iniziali.



Caso delta>0
i
t
Corrente a regime
Soluzione equazione omogenea
Corrente effettiva



Caso delta=0
i
t
Corrente a regime
Soluzione equazione omogenea
Corrente effettiva



Caso delta<0
i
t
Corrente a regime
Soluzione equazione omogenea
Corrente effettiva