INTEGRALI PER PARTI
(seconda parte)

Integrazioni per parti con equazioni

Esempio 1: $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

In questo caso possiamo scegliere se usare come fattore finito, a nostra scelta, e^x e $\operatorname{sen} x$. Per esempio, usiamo come fattore finito (quello da derivare nell'integrale) $\operatorname{sen} x$, e come fattore differenziale (quello di cui dobbiamo usare una primitiva) $e^x dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx =$$

Si noti che il fattore e^x a secondo membro è, in entrambi i termini, una primitiva del fattore differenziale $e^x dx$, mentre $\cos x$ è la derivata del fattore finito $\operatorname{sen} x$.

Integriamo nuovamente per parti $\int e^x \cos x\, dx$. È importante essere coerenti con la prima integrazione: ovvero, avendo scelto la prima volta l'esponenziale come fattore differenziale, altrettanto dovremo fare la seconda (altrimenti, si torna al punto di partenza):

$$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x)\, dx \right] =$$

Nuovamente, il fattore e^x a secondo membro è, in entrambi i termini, una primitiva del fattore differenziale $e^x dx$, mentre $-\operatorname{sen} x$ è la derivata del fattore finito $\cos x$.

Portiamo fuori dall'integrale il segno meno (equivale ad una costante moltiplicativa -1):

$$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \right] = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Abbiamo cominciato calcolando $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$, e abbiamo terminato ottenendo $e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Questa è un'equazione, la cui incognita è $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$, e i cui termini noti (nel senso di quantità fuori da un integrale) sono $e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$. Possiamo risolvere l'equazione portando a primo membro il termine $-\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C$$

Si noti che la costante di integrazione, che era sottintesa a secondo membro dal termine $-\int e^x sen\,x\,dx$, va indicata espressamente nel momento in cui lo portiamo a primo membro.
Dividendo per 2:

$$\int e^x sen\,x\,dx = \frac{e^x sen\,x - e^x \cos x + C}{2}$$

Si risolvono allo stesso modo (due integrazioni per parti seguite da un'equazione da risolvere) tutti gli integrali del tipo $\int A^{ax+b} sen(cx+d)\,dx$ o del tipo $\int A^{ax+b} \cos(cx+d)\,dx$.

Esempio 2: calcola $\int sen^2 x\,dx$
Questo integrale, che abbiamo già imparato a risolvere utilizzando le formule di bisezione, può essere anche calcolato per parti, utilizzando $sen\,x$ come fattore finito e $sen\,x\,dx$ come fattore differenziale:

$$\int sen^2 x\,dx = \int senx \cdot sen\,x\,dx = -\cos x\,sen\,x - \int -\cos x\,cosx\,dx =$$

Si noti che il fattore $-\cos x$ a secondo membro è una primitiva del fattore differenziale $sen\,x\,dx$, mentre $\cos x$ è la derivata del fattore finito $sen\,x$.
Portiamo fuori dall'integrale il segno meno:

$$= -sen\,x\cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$

Esprimiamo il coseno dentro l'integrale in funzione del seno:

$$= -sen\,x\cos x + \int (1 - sen^2 x)\,dx =$$

Spezziamo l'integrale:

$$= -sen\,x\cos x + \int 1 \cdot dx - \int sen^2 x\,dx =$$

Ricordiamo che $\int dx = x + C$:

$$= -sen\,x\cos x + x - \int sen^2 x\,dx$$

Abbiamo cominciato calcolando $\int sen^2 x\,dx$, e abbiamo terminato ottenendo $-sen\,x\cos x + x - \int sen^2 x\,dx$. per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$$\int sen^2 x\,dx = -sen\,x\cos x + x - \int sen^2 x\,dx$$

Questa è un'equazione, la cui incognita è $\int sen^2 x\,dx$, e i cui termini noti sono $-sen\,x\cos x + x$. Possiamo risolvere l'equazione portando a primo membro il termine $-\int sen^2 x\,dx$:

$2\int sen^2 x\,dx = -sen\,x\cos x + x + C$

Anche stavolta la costante di integrazione, inizialmente sottintesa, va indicata espressamente quando a secondo membro non sono più presenti integrali.

Dividiamo per 2:

$$\int sen^2 x\,dx = \frac{-sen\,x\cos x + x + C}{2}$$

Analogamente, si risolvono per parti tutti gli integrali del tipo $\int sen^n x\,dx$ **o** $\int \cos^n x\,dx$ **, con n numero intero pari, prendendo come fattore differenziale rispettivamente** $sen\,x\,dx$ **o** $\cos x\,dx$ **, o anche quelli del tipo** $\int sen^n x\cos^m x\,dx$ **, se n e m sono entrambi pari**

Esempio 3: calcola $\int sen^4 x\,dx$

$$\int sen^3 x\,dx = \int senx \cdot sen^3 x\,dx =$$

$$= -\cos x\,sen^3 x - \int -\cos x \cdot D\left(sen^3 x\right) dx =$$

Poiché $sen^3 x$ **è una funzione composta (** $\begin{cases} t = sen\,x \\ y = t^3 \end{cases}$ **), la sua derivata è il prodotto tra la derivata di** $sen\,x$ **(che è** $\cos x$ **) e quella di** t^3 **(che è** $3t^2 = 3\,sen^2 x$ **):**

$$= -\cos x\,sen^3 x - \int -\cos x \cdot 3\,cosx\,sen^2 x\,dx =$$

Portiamo fuori dall'integrale le costanti moltiplicative:

$$= -\cos x\,sen^3 x + 3\int \cos^2 x\,sen^2 x\,dx =$$

Esprimiamo il coseno dentro l'integrale in funzione del seno:

$$= -\cos x\,sen^3 x + 3\int \left(1 - sen^2 x\right) sen^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x\,sen^3 x + 3\int \left(sen^2 x - sen^4 x\right) dx =$$

Spezziamo l'integrale:

$$= -\cos x\,sen^3 x + 3\left(\int sen^2 x - \int sen^4 x\,dx\right) =$$

Abbiamo già visto nell'esempio precedente che $\int sen^2 x\,dx = \frac{-sen\,x\cos x + x + C}{2}$ **:**

$$= -\cos x\,sen^3 x + 3\left(\frac{-sen\,x\cos x + x}{2} - \int sen^4 x\,dx\right) =$$

Non abbiamo inserito la costante di integrazione, essendo sottintesa dall'integrale che segue.

$$=-\cos x\, sen^3 x+\frac{3(-sen\, x\cos x+x)}{2}-3\int sen^4 x\,dx=$$

$$=-sen^3 x\cos x+\frac{-3\,sen\,x\cos x+3x}{2}-3\int sen^4 x\,dx$$

Confrontando il testo con il risultato, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$$\int sen^4 x\,dx=-sen^3 x\cos x+\frac{-3\,sen\,x\cos x+3x}{2}-3\int sen^4 x\,dx$$

Portiamo a primo membro $-3\int sen^4 x\,dx$ **:**

$$4\int sen^4 x\,dx=-sen^3 x\cos x+\frac{-3\,sen\,x\cos x+3x}{2}+C$$

Ovvero:

$$4\int sen^4 x\,dx=\frac{-2\,sen^3 x\cos x-3\,sen\,x\cos x+3x+2C}{2}$$

Dividiamo per 4, e otteniamo il risultato:

$$\int sen^4 x\,dx=\frac{-2\,sen^3 x\cos x-3\,sen\,x\cos x+3x+2C}{8}$$

Altri esempi di integrali per parti

Esempio 4: $\int \ln x\,dx$

In questo caso utilizzeremo $\ln x$ **come fattore finito e** $dx=1\cdot dx$ **come fattore differenziale:**

$$\int \ln x\,dx=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

Riepilogando, $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$

Nota: tutti gli integrali del tipo $\int f(x)\cdot\ln g(x)\,dx$ **, dove** $f(x)$ **e** $g(x)$ **sono funzioni razionali fratte (rapporto tra due polinomi), se integrati per parti, utilizzando** $\ln g(x)$ **come fattore finito e** $f(x)\,dx$ **come fattore differenziale, vengono ricondotti agli integrali delle funzioni razionali fratte (verificando sempre che non si sia un modo più semplice).**

Esempio 5: $\int \ln(2x-1)\,dx$

Utilizziamo $\ln(2x-1)$ **come fattore finito e** $dx=1\cdot dx$ **come fattore differenziale. Da notare che, se usassimo** x **come primitiva di** 1 **, otterremmo:**

$$\int \ln(2x-1)\,dx = x\cdot\ln(2x-1) - \int x\cdot\frac{2}{2x-1}\,dx =$$

$= x\ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\,dx$, obbligandoci ad integrare la funzione razionale fratta $\frac{2x}{2x-1}$. Si può fare, ma è più semplice se scegliamo una costante di integrazione tale che il numeratore si semplifichi con il denominatore. Poiché $\int dx = x + C$, ponendo $C = -\frac{1}{2}$ otteniamo, come primitiva di 1 , $x-\frac{1}{2}$. Di conseguenza, ricominciando i calcoli:

$$\int \ln(2x-1)\,dx = \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(2x-1) - \int \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{2x-1}\,dx =$$

$$= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(2x-1) - \int \frac{2x-1}{2x-1}\,dx = \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(2x-1) - \int dx =$$

$$= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(2x-1) - x + C$$

Riepilogando, $\int \ln(2x-1)\,dx = \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(2x-1) - x + C$