INTEGRALI DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Seconda parte

1b1) $\Delta>0$: riepilogo e generalizzazione

a) Determinazione dell'identità da imporre

Riepilogando, per calcolare un integrale del tipo $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ (denominatore di secondo grado, numeratore di grado inferiore), nel caso in cui sia $\Delta=b^2-4ac>0$, ricordando che in questo caso l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha due soluzioni reali distinte x_1 e x_2, possiamo, per prima cosa, determinare due costanti A e B tali che

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\equiv\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2} .$$

Al posto dei denominatori $x-x_1$ e $x-x_2$ è possibile, per evitare le frazioni di frazione, utilizzare a secondo membro loro multipli. Per esempio, se $x_1=\frac{3}{5}$, al posto di $\frac{A}{x-\frac{3}{5}}$ possiamo inserire $\frac{A}{5x-3}$.

Inoltre, se il denominatore è stato scomposto in fattori, è possibile utilizzare direttamente come denominatori i singoli fattori (a condizione che non si annullino per lo stesso valore di x, altrimenti $\Delta=0$!). Per esempio, $\frac{x-4}{(3x+5)(3x-5)}\equiv\frac{A}{3x+5}+\frac{B}{x-5}$ [1].

Più in generale, per risolvere un integrale del tipo $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono due polinomi di grado rispettivamente n ed d, con $n<d$, $\frac{N(x)}{D(x)}\equiv\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_d}{x-x_d}$

$$\frac{N(x)}{D(x)}\equiv\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_d}{x-x_d}$$

e l'equazione $D(x)=0$ ammette

---

1 Attenzione! È possibile usare $\frac{A}{5x-3}$ al posto di $\frac{A}{x-\frac{3}{5}}$ in quanto ciò implica un valore doppio di A, che determineremo correttamente semplicemente risolvendo il sistema. Non è invece lecito usare un multiplo di un fattore nella scomposizione in fattori a primo membro, perché modificheremmo la funzione da integrare! Per esempio, $\frac{2x+1}{(x-\frac{1}{2})(x+1)}$ non può essere sostituito da $\frac{2x+1}{(2x-1)(x+1)}$!

d soluzioni reali distinte x_1 , x_2 , ..., x_d , possiamo imporre l'ìdentità

$$\frac{N(x)}{D(x)} \equiv \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_d}{x-x_d} \quad .$$

Anche in questo caso, possiamo, se ci fa comodo per i calcoli, sostituire ai singoli denominatori a secondo membro i loro multipli, o, se i fattori sono tutti di primo grado e non si annullano mai per lo stesso valore di x, utilizzare la scomposizione in fattori di $D(x)$ per ricavare i denominatori. Per esempio,

$$\frac{3x^2+2x-5}{(3x+1)(x-5)(2x-3)} \equiv \frac{A}{3x+1}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{2x-3} \quad .$$

b) Determinazione delle costanti

Per determinare le costanti presenti nell'identità che abbiamo imposto, dobbiamo:

b1) calcolare e moltiplicare per il minimo comune multiplo per ridurre in forma intera;

b2) portare tutto a primo membro;

b3) sommare tutti i termini con la stessa potenza di x (mettere in evidenza x tra tutti i termini di primo grado, x^2 tra tutti quelli di secondo, x^3 tra tutti quelli di terzo, e così via;

b4) uguagliare a zero tutti i coefficienti ottenuti, compreso il termine noto;

b5) mettere a sistema tutte le equazioni ottenute al punto b4 e risolvere il sistema.

c) Calcolo dell'integrale iniziale

Per calcolare l'integrale iniziale, si sostituisce la funzione integranda con il secondo membro dell'identità che abbiamo imposto, utilizzando i valori delle costanti determinate risolvendo il sistema. Spezzando l'integrale, si ottengono due integrali riconducibili al caso $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ (vedi caso 1a).

1b2) $\Delta=0$

Riprendiamo il caso in cui il denominatore sia di secondo grado (sempre con il numeratore di grado inferiore). Se $\Delta=0$, il trinomio

ax^2+bx+c ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2$. In questo caso possiamo imporre l'identità

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\equiv\frac{A}{x-x_{1,2}}+\frac{B}{(x-x_{1,2})^2} \quad .$$

Anche in questo caso possiamo sostituire i denominatori con loro multipli per evitare le frazioni di frazione.

Per esempio, per calcolare $\int\frac{5x-3}{4x^2-4x+1}dx$, poiché $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$, e quindi $4x^2-4x+1=0$ per $x_{1,2}=\frac{1}{2}$, possiamo imporre

$$\frac{5x-3}{4x^2-4x+1}\equiv\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2} \quad .$$

Si noti che abbiamo usato al denominatore la quantità $2x-1$ al posto di $x-\frac{1}{2}$ per evitare le frazioni di frazione.

Risolviamo $\frac{5x-3}{4x^2-4x+1}\equiv\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$.

$$\frac{5x-3}{(2x-1)^2}\equiv\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2} \quad .$$

Calcoliamo il minimo comune denominatore:

$$\frac{5x-3}{(2x-1)^2}\equiv\frac{A(2x-1)+B}{(2x-1)^2} \quad .$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore, imponendo $(2x-1)^2\neq 0$:

$$5x-3\equiv A(2x-1)+B \quad .$$

Effettuiamo i calcoli a secondo membro:

$$5x-3\equiv 2Ax-A+B \quad .$$

Portiamo tutto a primo membro:

$$5x-3-2Ax+A-B\equiv 0 \quad .$$

Mettiamo in evidenza x dai termini di primo grado:

$$(5-2A)x-3+A-B\equiv 0 \quad .$$

Poiché i polinomi a primo e a secondo membro sono identici, devono avere ordinatamente gli stessi coefficienti. Poiché a secondo membro c'è zero, tutti i coefficienti a primo membro devono essere nulli. Quindi:

$$\begin{cases} 5-2A=0 \\ -3+A-B=0 \end{cases} .$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ -3+\dfrac{5}{2}-B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ B=-3+\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

Quindi $\dfrac{5x-3}{4x^2-4x+1} \equiv \dfrac{\frac{5}{2}}{2x-1}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{(2x-1)^2}$ **.**

Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int \frac{5x-3}{4x^2-4x+1}dx$

$$\int \frac{5x-3}{4x^2-4x+1}dx=\int \left(\frac{\frac{5}{2}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{(2x-1)^2} \right)dx=$$

Spezziamo l'integrale:

$$=\int \frac{\frac{5}{2}}{2x-1}dx+\int \frac{-\frac{1}{2}}{(2x-1)^2}dx=$$

Portiamo fuori dagli integrali le costanti moltiplicative:

$$=\frac{5}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x-1)^2}dx=$$

Il primo integrale può essere ricondotto alla forma $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ **, il secondo alla forma** $\displaystyle\int f'(x)\cdot[f(x)]^n dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$ **. In entrambi i casi, abbiamo bisogno, al numeratore, della derivata di** $2x-1$ **, che è** 2 **. Moltiplichiamo e dividiamo quindi per 2 dentro entrambi gli integrali:**

$$=\frac{5}{2}\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(2x-1)^2}dx=$$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ Portiamo fuori dagli integrali le costanti moltiplicative:

$$=\frac{5}{4}\int \frac{2}{2x-1}dx-\frac{1}{4}\int \frac{2}{(2x-1)^2}dx=$$

Trasformiamo il secondo integrale per ricondurlo alla forma $\int f'(x)\cdot[f(x)]^n dx$, utilizzando la definizione di potenza con esponente intero:

$$=\frac{5}{4}\int \frac{2}{2x-1}dx-\frac{1}{4}\int [2(2x-1)^{-2}]dx=$$

Il primo integrale è del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, mentre il secondo è del tipo $\int f'(x)\cdot[f(x)]^n dx$. In entrambi i casi $f(x)=2x-1$, mentre nel secondo $n=-2$. Calcoliamo quindi i due integrali utilizzando le formule $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ e $\int f'(x)\cdot[f(x)]^n dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$:

$$=\frac{5}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x-1)^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{5}{4}\ln|2x-1|+\frac{1}{4}(2x-1)^{-1}+C=$$

Trasformiamo $(2x-1)^{-1}$ in frazione, sempre utilizzando la definizione di potenza con esponente intero:

$$=\frac{5}{4}\ln|2x-1|+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}+C=\frac{5}{4}\ln|2x-1|+\frac{1}{8x-4}+C\ .$$

Riepilogando,

$$\int \frac{5x-3}{4x^2-4x+1}dx=\frac{5}{4}\ln|2x-1|+\frac{1}{8x-4}+C\ .$$

Esercizi:

1) $\int \frac{5}{x^2-4x}dx$

2) $\int \frac{2x-1}{x^2+2x-3}dx$

3) $\int \frac{x+2}{9x^2+12x+4}dx$

4) $\int \frac{2x^2+x-1}{6x^3-7x^2-x+2}dx$ **(suggerimento: iniziare a scomporre i denominatore utilizzando la regola di Ruffini).**

5) $\int \frac{x+2}{3x^3-x^2-3x+1}dx$ **(suggerimento:** $3x^3-x^2-3x+1=x^2(3x-1)-(3x-1)=\ldots$ **).**

Per oggi ci fermiamo qui. Fatemi sapere se ci sono dubbi. Come per la prima lezione, per eventuali richieste di chiarimenti, usa la funzione "manda un messaggio" nel registro elettronico. Risponderò appena possibile.