Una radio a tachioni ~ versione generale ~ pag.1

Problema su spazio-tempo di Minkowski e trasformazioni di Lorentz

L'astronave di Star Trek, comandata dal comandante Kirk, parte dalla stazione spaziale Deep Space Nine, alla posizione $x=0\,al$, nell'istante $t=0\,a$, alla velocità $v=fc$ (con $0<f<1$). Spock rimane fermo sulla stazione spaziale, e, utilizzando una radio a tachioni, invia, dopo τ anni, un segnale che viaggia a velocità mc (con $m>1$) verso il comandante Kirk, che, utilizzando un dispositivo identico, lo reinvia immediatamente a Spock.
Determina, in un diagramma spazio-tempo di Minkowski, le equazioni delle rette che rappresentano, sia nel sistema di riferimento della stazione spaziale, sia in quella dell'astronave: a) la traiettoria dell'astronave; b) quella di Spock; c) gli estremi del cono di luce; d) la traiettoria del segnale inviato da Spock; la traiettoria del segnale di risposta inviato da Kirk; e) le coordinate degli eventi che rappresentano la ricezione dei segnali da parte di Kirk e di Spock.

Nota: questo problema è ispirato al video presente all'indirizzo https://www.youtube.com/watch?v=DlyG1WpfJaM.

Svolgimento

Astronave, sistema della stazione spaziale

Partiamo dalla definizione di velocità media, ovvero $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_1-t_1}$. In questa formula x_1 sarà la posizione nota nell'istante iniziale t_1, mentre t_2 e x_1 saranno il generico istante t e la relativa posizione x.

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=v_{astronave}\ ;\ \frac{x-0}{t-0}=fc\ ;\ \frac{x}{t}=fc\ ;\ fc=\frac{x}{t}\ ;\ ct=\frac{1}{f}x$$

Spock, sistema della stazione spaziale

$x=0$ (Spock è fermo nel suo sistema di riferimento).

Rette che delimitano il cono di luce, sistema della stazione spaziale

$ct=\pm x$ (bisettrici dei quadranti).

Segnale inviato da Spock, sistema della stazione spaziale

Partiamo, anche in questo caso, dalla formula che definisce la velocità media:

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=v_{segnale} \quad ; \quad \frac{x-0}{t-\tau}=mc \quad ; \quad x=mc(t-\tau) \quad ; \quad x=mct-mc\tau \quad ;$$

$$mct=x+mc\tau \qquad ct=\frac{1}{m}x+c\tau \quad .$$

Evento ricezione segnale, sistema della stazione spaziale

Poiché le equazioni $ct=\frac{1}{m}x+c\tau$ e $ct=\frac{1}{f}x$ associano rispettivamente alla posizione del segnale e a quella dell'astronave l'istante in cui tale posizione è assunta, posizione e istante della ricezione del segnale si ottengono mettendo a sistema le due equazioni (x e t devono essere gli stessi per entrambe).

$$\begin{cases} ct=\frac{1}{m}x+c\tau \\ ct=\frac{1}{f}x \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{f}x=\frac{1}{m}x+c\tau \\ ct=\frac{1}{f}x \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{f}x-\frac{1}{m}x=c\tau \\ ct=\frac{1}{f}x \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{f}-\frac{1}{m}\right)x=c\tau \\ ct=\frac{1}{f}x \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{m-f}{mf}\cdot x=c\tau \\ ct=\frac{1}{f}x \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=\frac{cmf\,\tau}{m-f} \\ ct=\frac{1}{f}\cdot\frac{cmf\,\tau}{m-f} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=\frac{cmf\,\tau}{m-f} \\ ct=\frac{cm\,\tau}{m-f} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{cmf\,\tau}{m-f};\frac{cm\,\tau}{m-f}\right) \quad .$$

Trasformazioni di Lorentz (da utilizzare nel seguito):

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ t'=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz inverse (si ottengono scambiando x e t con x' e t' e cambiando segno alla velocità):

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+Vt') \\ t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

Una radio a tachioni ~ versione generale ~ pag.3

Calcolo di γ **:** $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{fc}{c}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}$

Posizione ricezione segnale, sistema dell'astronave

Partiamo dalle coordinate dell'evento nel sistema della stazione spaziale:

$$\begin{cases} x=\dfrac{cmf\,\tau}{m-f} \\ ct=\dfrac{cm\,\tau}{m-f} \end{cases}$$

e applichiamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-V\,t) \\ t'=\gamma\left(t-\dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

per ricavare x' **e** t' **. Osserviamo che** $ct=\dfrac{cm\,\tau}{m-f}\Rightarrow t=\dfrac{m\,\tau}{m-f}$ **(dobbiamo usare usare ct nelle coordinate dell'evento, t nelle trasformazioni di Lorentz).**

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}\left(\dfrac{cmf\,\tau}{m-f}-fc\cdot\dfrac{m\,\tau}{m-f}\right) \\ t'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}\left(\dfrac{m\,\tau}{m-f}-\dfrac{f}{c}\cdot\dfrac{cmf\,\tau}{m-f}\right) \end{cases};\quad \begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}\left(\dfrac{cmf\,\tau}{m-f}-\dfrac{cmf\,\tau}{m-f}\right) \\ t'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}\left(\dfrac{m\,\tau}{m-f}-\dfrac{mf^2\,\tau}{m-f}\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot 0 \\ t'=\dfrac{1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot\dfrac{m\,\tau-mf^2\,\tau}{m-f} \end{cases};\quad \begin{cases} x'=0 \\ t'=\dfrac{m\,\tau(1-f^2)}{(m-f)\sqrt{1-f^2}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x'=0 \\ t'=\dfrac{m\tau\left(\sqrt{1-f^2}\right)^2}{(m-f)\sqrt{1-f^2}} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x'=0 \\ t'=\dfrac{m\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x'=0 \\ ct'=\dfrac{cm\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \end{cases} ;$$

$P'\left(0;\dfrac{cm\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2}\right)$ (ovviamente $x'=0$, essendo l'astronave ferma nel proprio sistema di riferimento).

Astronave, sistema dell'astronave

Partiamo dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, ovvero $ct=\dfrac{1}{k}x$, e usiamo le trasformazioni inverse di Lorentz

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+Vt') \\ t=\gamma\left(t'+\dfrac{\beta}{c}x'\right) \end{cases} :$$

$$c\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)=\frac{1}{k}\gamma(x'+Vt') \;;\quad c\left(t'+\frac{k}{c}x'\right)=\frac{1}{k}(x'+kct') \;;$$

$$ct'+kx'=\frac{1}{k}x'+ct' \;;\quad kx'-\frac{1}{k}x'=ct'-ct' \;;\quad \left(k-\frac{1}{k}\right)x'=0 \;;$$

$x'=0$ (ovvio: l'astronave è ferma nel proprio sistema di riferimento!)

Spock, sistema dell'astronave

Anche in questo caso partiamo dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, e utilizziamo le trasformazioni inverse di Lorentz:

$$x=0 \;;\quad \gamma(x'+Vt')=0 \;;\quad x'+fct'=0 \;;\quad fct'=-x' \;;\quad ct'=-\frac{1}{f}x'$$

Rette che delimitano il cono di luce, sistema dell'astronave

Partiamo anche in questo caso dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, ovvero $ct=\pm x$, e utilizziamo le trasformazioni inverse di Lorentz:

$$c\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)=\pm\gamma(x'+Vt') \;;\quad c\left(t'+\frac{f}{c}x'\right)=\pm(x'+fct') \;;$$

$$ct'+fx'=\pm x'\pm fct' \;;\quad ct'\mp fct'=\pm x'-fx' \;;$$

Una radio a tachioni ~ versione generale ~ pag.5

$ct'(1\mp f)=x'(\pm 1-f)$; $ct'(1\mp f)=\pm x'(1\mp f)$; $ct'=\pm x'$ **(gli estremi del cono di luce sono SEMPRE le bisettrici dei quadranti: in altre parole, sono invarianti per le trasformazioni di Lorentz).**

Traiettoria del segnale di risposta, sistema dell'astronave

Partiamo, anche in questo caso, dalla formula che definisce la velocità media.

$$\frac{x'_2-x'_1}{t'_2-t'_1}=v_{segnale} \quad ; \quad \frac{x'-0}{t'-\frac{m\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2}}=mc \quad ;$$

$$x'=mc\left(t'-\frac{m\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2}\right) \quad ; \quad x'=mct'-\frac{m^2c\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad ;$$

$$mct'=x'+\frac{m^2c\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad ; \quad ct'=\frac{1}{m}x'+\frac{mc\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad .$$

Traiettoria del segnale di risposta, sistema della stazione spaziale

Stavolta partiamo dalla traiettoria nel sistema dell'astronave, e utilizziamo le trasformazioni di Lorentz.

$$ct'=\frac{1}{m}x'+\frac{mc\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad ;$$

$$c\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right)=\frac{1}{m}\gamma(x-Vt)+\frac{mc\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad ;$$

$$c\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\left(t-\frac{f}{c}x\right)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}(x-fct)+\frac{mc\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad ;$$

$$\sqrt{1-f^2}\cdot c\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\left(t-\frac{f}{c}x\right)=\sqrt{1-f^2}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}(x-fct)+\sqrt{1-f^2}\cdot\frac{mc\tau}{m-f}\sqrt{1-f^2} \quad ;$$

$$c\left(t-\frac{f}{c}x\right)=\frac{1}{m}(x-fct)+\frac{mc\tau(1-f^2)}{m-f} \quad ;$$

$$ct-fx=\frac{1}{m}x-\frac{f}{m}ct+\frac{mc\tau(1-f^2)}{m-f} \quad ;$$

$$ct+\frac{f}{m}ct=fx+\frac{1}{m}x+\frac{mc\tau(1-f^2)}{m-f} \quad ;$$

$$mct+fct=fmx+x+\frac{m^2c\tau(1-f^2)}{m-f} \quad ;$$

$$(m+f)\,ct=(fm+1)\,x+\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{m-f}$$

$$ct=\frac{fm+1}{m+f}\,x+\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{(m-f)(m+f)}$$

$$ct=\frac{fm+1}{m+f}\,x+\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{m^2-f^2}$$

Ricezione del segnale di risposta, sistema della stazione spaziale

Poiché le equazioni $ct=\frac{fm+1}{m+f}x+\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{m^2-f^2}$ e $x=0$ associano rispettivamente alla posizione del segnale e a quella della stazione spaziale l'istante in cui tale posizione è assunta, posizione e istante della ricezione del segnale di risposta si ottengono mettendo a sistema le due equazioni (x e t devono essere gli stessi per entrambe).

$$\begin{cases} ct=\frac{fm+1}{m+f}x+\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{m^2-f^2} \\ x=0 \end{cases} \; ; \qquad \begin{cases} ct=\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{m^2-f^2} \\ x=0 \end{cases} \; ;$$

$Q\left(0\,;\frac{m^2 c\,\tau(1-f^2)}{m^2-f^2}\right)$ **. Il segnale di risposta viene ricevuto all'istante** $t_2=\frac{m^2\tau(1-f^2)}{m^2-f^2}$ **.**

Ora verifichiamo che è sempre $t_2<\tau$.

$t_2<\tau$; $\frac{m^2\tau(1-f^2)}{m^2-f^2}<\tau$; $\frac{m^2(1-f^2)}{m^2-f^2}<1$ **(non cambia il verso dividendo entrambi i membri della disuguaglianza per $\tau>0$).**
Inoltre, essendo $m>1\Rightarrow m^2>1$ e $0<f<1\Rightarrow f^2<1$, è anche $m^2>1>f^2$, e quindi $m^2>f^2\Rightarrow m^2-f^2>0$. Di conseguenza possiamo moltiplicare entrambi i membri della disuguaglianza $\frac{m^2(1-f^2)}{m^2-f^2}<1$ per $m^2-f^2>0$ senza cambiarne il verso:

$m^2(1-f^2)<m^2-f^2$; $m^2-m^2f^2<m^2-f^2$; $-m^2f^2+f^2<0$; $m^2f^2-f^2>0$.

Poiché $0<f<1 \Rightarrow f^2>0$, possiamo dividere entrambi i membri della disuguaglianza per $f^2>0$:

$m^2-1>0$; $m^2>1$

Ma, come abbiamo già visto, $m>1 \Rightarrow m^2>1$. Quindi la disequazione è sempre verificata, e di conseguenza sarà sempre $t_2<\tau$. In altre parole, se l'astronave viaggia a velocità fc inferiore a quella della luce ($0<f<1$), mentre la velocità mc del segnale è superiore a quella della luce ($m>1$), il segnale di risposta arriva sempre prima dell'invio del primo segnale. Se fosse possibile realizzare una radio a tachioni, potremmo mandare segnali nel passato (e, quindi, influenzarlo)!